Mars 1994

Supergravité: une introduction

J.-P. Derendinger

Institut de Physique
Université de Neuchâtel
A.-L. Breguet 1
CH–2000 Neuchâtel, Suisse

Cours donnés lors de la 25ème Ecole d'été de physique des particules,
"Relativité Générale et Ondes Gravitationnelles",
Gif-sur-Yvette, France, 13–17 septembre 1993.

1 Introduction

La supergravité réunit dans le cadre de la théorie des champs deux idées sur l'espace-temps parmi les plus fondamentales: la relativité générale d'Einstein [1] et la supersymétrie [2]. Son ambition est de donner un cadre théorique à la description de l'ensemble des forces régissant la physique des particules élémentaires, y compris la gravitation.

Aux énergies accessibles à l'expérience, la gravité ne joue aucun rôle dans les interactions des particules élémentaires. Le modèle standard de Glashow, Salam et Weinberg [3] est en accord remarquable avec l'ensemble des données expérimentales aujourd'hui disponibles. Le modèle standard des interactions fortes, faibles et électromagnétiques est une théorie de champs quantique; les grandeurs physiques sont calculables (en théorie des perturbations) pour des énergies en principe arbitraires. Le niveau d'unification des interactions fortes et électrofaibles y reste cependant relativement faible, et il contient un nombre élevé de paramètres (19) de valeurs théoriquement arbitraires. Le modèle standard n'est cependant pas applicable au-delà du domaine d'énergie dans lequel la gravitation peut être négligée. Celle-ci devient quantitativement significative aux environs de la masse de Planck, $M_P \sim 10^{19}$ GeV, qui est donc le "cutoff" physique délimitant le domaine de validité du modèle standard.

Au niveau microscopique, la relativité générale peut être considérée comme une théorie de la dynamique du graviton et de ses interactions avec les champs des quarks, leptons et champs de jauge du modèle standard des interactions fortes, électromagnétiques et faibles. L'ensemble (modèle standard + relativité générale) forme donc la base naturelle d'une description unifiée de toutes les interactions. Il existe cependant une différence essentielle dans la nature de ces deux composantes: alors que le modèle standard est une théorie *quantique*, la relativité générale est une théorie *classique* de champs. Sa quantification produit une théorie non renormalisable en présence de matière ou de rayonnement. L'unification de toutes les forces dans une théorie quantique demande donc un cadre théorique plus élaboré que l'ensemble (modèle standard + relativité générale).

A défaut de preuve expérimentale, deux arguments complémentaires sont souvent invoqués pour justifier l'introduction de la supersymétrie et de la supergravité dans une théorie des interactions fondamentales. Tout d'abord, la disparité entre l'échelle caractéristique du modèle standard, qui est de l'ordre de la masse des bosons de jauge $W^\pm$ et Z^0, c'est à dire proche de 10^2 GeV, et l'échelle M_P de la gravitation pose un problème théorique sévère. En théorie des champs, une telle hiérarchie $M_Z \ll M_P$ est instable sous les corrections quantiques ou semi-classiques, qui tendent à uniformiser les échelles. Ce n'est cependant par le cas si l'échelle d'énergie des interactions faibles est protégée par l'existence d'une supersymétrie. Cet argument est à la base de l'extension minimale supersymétrique du modèle standard (MSSM= minimal supersymmetric standard model), qui est l'enjeu d'expériences actuelles et futures. L'ensemble (MSSM + relativité générale) est alors une théorie de supergravité, c'est à dire une théorie de champ invariante sous les transformations d'une supersymétrie *locale*.

D'autre part, les seules théories quantiques de la gravitation aujourd'hui disponibles sont basées sur les supercordes. Toutes contiennent une supersymétrie. Les constituants fondamentaux sont des objets unidimensionnels qui remplacent les particules ponctuelles de la théorie de champs. Comme leur taille est de l'ordre de M_P^{-1}, leur comportement physique ne diffère de celui d'une particule que pour des énergies E proches ou supérieures à M_P. Dans le domaine $E \ll M_P$, une théorie de champs effective permet de décrire en bonne approximation la physique des constituants fondamentaux légers par rapport à M_P, de manière analogue à la théorie de Fermi pour les interactions faibles mettant en jeu des énergies très inférieures à la masse du $W^\pm$. Cette théorie de champs effective est une supergravité.

La supergravité est donc au centre de notre approche théorique de l'unification de toutes les forces fondamentales: elle est le point de rencontre de l'approche quantique de la gravitation et de la recherche d'extensions du modèle standard conceptuellement plus satisfaisantes.

Ces notes n'ont pas l'ambition de couvrir l'ensemble de la construction des théories de supergravité. Elles visent à introduire les idées et les concepts mis en jeu, ainsi que certains points techniques propres à la supersymétrie. Un grand nombre d'ouvrages (en particulier, [4–12]) proposent une discussion complète de la construction des théories supersymétriques et de leur rôle dans la description des interactions fondamentales.

2 Préambule non supersymétrique

Avant d'aborder les aspects particuliers de la supersymétrie et de la supergravité, il est peut-être utile de considérer rapidement le couplage du modèle standard des interactions fortes et électrofaibles à la gravitation. Le modèle standard est défini par une action

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L}_{ms}, \tag{2.1}$$

avec une densité lagrangienne $\mathcal{L}_{ms}$ qu'il n'est pas nécessaire de préciser ici [3, 13]. Cette action décrit la dynamique des champs associés aux particules élémentaires du modèle standard: quarks, leptons, γ, $W^\pm$, Z^0, gluons, bosons de Higgs. Du point de vue des symétries d'espace-temps $G_{esp.}$, le principe de relativité restreinte exige que l'action et la densité lagrangienne soient invariantes sous les transformations de coordonnées globales du groupe de Poincaré. Il n'y a pas de gravitation, la métrique de l'espace-temps est celle d'un espace minkowskien, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, qui ne dépend pas du point x de l'espace-temps. Les symétries de l'action S sont donc de la forme

$$G_{esp.} \times G_{int.},$$

avec un groupe de symétries internes donné par les symétries de jauge du modèle standard, $G_{int.} = SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, auxquelles s'ajoutent des invariances globales telles que le nombre baryonique ou les nombres leptoniques.

Coupler la théorie (2.1) à la gravitation revient à imposer un principe de jauge supplémentaire qui exige l'invariance sur les transformations locales arbitraires de coordonnées. Cette condition implique en particulier l'introduction d'une métrique quelconque,

$$\eta_{\mu\nu} \qquad \longrightarrow \qquad g_{\mu\nu}(x),$$

qui décrira le graviton, et de modifier la densité lagrangienne par des termes dépendant de $g_{\mu\nu}$ de manière à assurer l'invariance:

$$\mathcal{L}_{ms} \qquad \longrightarrow \qquad \mathcal{L}_{ms,local}.$$

Techniquement, il s'agit de remplacer si nécessaire les dérivées ∂_μ par des dérivées covariantes sous les transformations locales de coordonnées, selon une procédure proche de celle employée lors de la construction de théories de jauge telles que le modèle standard.[1]

La propagation et les interactions du graviton sont déterminées par l'équation d'Einstein [1]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.2}$$

où $R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, G est la constante de Newton et $T_{\mu\nu}$ le tenseur d'énergie-impulsion. Cette équation peut être obtenue par un principe d'action appliqué à

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \, \mathcal{L}_E, \\ \mathcal{L}_E &= \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2\kappa^2} R \right] + \mathcal{L}_M, \qquad g = \det g_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

L'équation (2.2) est alors l'équation d'Euler-Lagrange du graviton $g_{\mu\nu}$. La constante de couplage gravitationnelle est donnée par

$$\kappa^2 = 8\pi G = 8\pi M_P^{-2}.$$

Sous une variation du tenseur métrique,

$$\delta \mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \sqrt{-g} \, T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

qui définit le tenseur d'énergie-impulsion. La densité lagrangienne de la matière au niveau microscopique sera celle du modèle standard,

$$\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{ms,local},$$

ou, plus généralement, celle d'une théorie de champ unifiée des interactions fortes et électrofaibles.

Au niveau classique, le couplage du modèle standard à la gravitation ne présente donc pas de difficulté. L'action est

$$S = \int d^4x \, \left[-\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{-g} R + \mathcal{L}_{ms,local} \right]. \tag{2.4}$$

Cependant, alors que l'action (2.1) conduit à une théorie de champs quantique cohérente et renormalisable, il apparaît que la théorie (2.4) n'a pas de sens au niveau quantique et que le couplage de la matière à la gravitation selon cette procédure détruit la renormalisabilité.

[1]Quelques précisions sont données dans la section 3.7.

Il convient de remarquer que le problème de l'incohérence quantique de (2.4) n'est pas lié à l'existence de régions de l'espace-temps à forte courbure. La théorie n'est pas renormalisable en théorie des perturbations de l'espace de Minkowski, où on écrit

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \tag{2.5}$$

et on quantifie le champ $h_{\mu\nu}(x)$ dans l'espace plat de géométrie $\eta_{\mu\nu}$. La quantification de l'action (2.4) dans une géométrie courbe,

$$g_{\mu\nu}(x) = g^0_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}(x), \qquad g^0_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu},$$

par exemple au voisinage d'un trou noir, présente d'importantes difficultés de principe qui s'ajoutent aux problèmes techniques non résolus de la quantification de la gravitation.

Les symétries de l'action (2.4) sont également de la forme $G_{esp.} \times G_{int.}$, la symétrie d'espace-temps étant locale en présence de la gravitation. Les symétries internes et d'espace-temps commutent; la connaissance des symétries d'espace-temps, qui découle du principe de relativité générale, ne donne donc pas d'informations sur le contenu en champs du modèle standard et sur les propriétés de transformations ("nombres quantiques") des particules élémentaires par rapport aux symétries internes. Ceci ne sera plus le cas pour les théories de supersymétrie et de supergravité.

3 Supersymétrie et supergravité

La supergravité est une théorie classique de champs invariante sous les transformations de supersymétrie locale. Il s'agit donc d'une théorie de jauge de la supersymétrie. Il est donc indispensable d'entamer la discussion de leur construction et de leur structure par une brève introduction à la supersymétrie globale.

3.1 La supersymétrie

Les théories de champs utilisées dans la description des interactions des particules élémentaires sont avant tout caractérisées par leur contenu en symétries, qui se divisent en symétries de l'espace-temps et symétries internes. Les symétries internes du modèle standard correspondent au groupe de jauge $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$, qui implique l'existence des bosons de jauge (gluons, $W^\pm$, Z^0 et photon) porteurs des interactions. Les symétries de l'espace-temps suivent du principe de relativité restreinte qui postule l'invariance sous les transformations globales (continues) du groupe de Poincaré. La supersymétrie est une extension de ces symétries globales de l'espace-temps.

Une théorie de champs est définie au moyen d'une action

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}.$$

Le principe de relativité restreinte impose l'invariance de l'action et de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$ sous les transformation du groupe de Poincaré, qui contient les translations d'espace-temps et les transformations de Lorentz. Une transformation de Poincaré infinitésimale des coordonnées x^μ peut s'écrire

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \tag{3.1}$$

avec

$$\delta x^\mu = a^\mu + \omega^{\mu\nu} x_\nu. \tag{3.2}$$

Les dix paramètres de la transformation sont a^μ, pour les translations, et $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$, pour les transformations de Lorentz (propres orthochrones). Cette transformation infinitésimale peut également s'écrire sous la forme conventionnelle

$$\delta x^\mu = i(a^\nu P_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho} L_{\nu\rho}) x^\mu, \tag{3.3}$$

les dix opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} P_\nu &= -i\partial_\nu, \\ L_{\nu\rho} &= i(x_\nu \partial_\rho - x_\rho \partial_\nu), \end{aligned} \tag{3.4}$$

étant les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré pour les transformations des coordonnées x^μ [2]. Ces générateurs satisfont les règles de commutation

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0, \\ [L_{\mu\nu}, P_\rho] &= -i\eta_{\mu\rho} P_\nu + i\eta_{\nu\rho} P_\mu, \\ [L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] &= -i\left(\eta_{\mu\rho} L_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} L_{\mu\rho} - \eta_{\mu\sigma} L_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} L_{\mu\sigma}\right), \end{aligned} \tag{3.5}$$

qui définissent l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré. Dans une théorie de champs relativiste, la densité lagrangienne est une fonctionnelle d'un ensemble de champs $\phi(x)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$. L'invariance relativiste exige qu'il existe un ensemble d'opérateurs P_μ et $L_{\mu\nu}$, vérifiant (3.5), qui agissent sur les champs ϕ et sur les coordonnées x, et génèrent les transformations infinitésimales de Poincaré, $\phi(x) \longrightarrow \phi'(x')$.

En fait, la deuxième relation (3.5) détermine la transformation de Lorentz infinitésimale des opérateurs P_ρ:

$$\delta P_\rho = \frac{1}{2} i\omega^{\mu\nu} [L_{\mu\nu}, P_\rho] = \omega_\rho{}^\mu P_\mu,$$

qui est l'équivalent opératoriel de (3.3). Cette relation indique que P_ρ se transforme comme un vecteur et, en particulier, que P_ρ a "spin un" [3]. La supersymétrie ajoute à l'algèbre de Poincaré des transformations générées par des opérateurs de spin 1/2, c'est à dire des opérateurs Q_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, qui forment un spineur de Majorana et qui vérifient

$$[L^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\frac{i}{4}\left([\gamma^\mu, \gamma^\nu] Q\right)_\alpha, \tag{3.6}$$

où les γ^μ sont des matrices de Dirac vérifiant $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$. D'autre part,

$$[P_\mu, Q_\alpha] = 0, \tag{3.7}$$

[2] Notez que les paramètres et les générateurs ont les mêmes caractéristiques d'espace-temps: a^μ et P^μ sont des vecteurs, $\omega^{\mu\nu}$ et $L^{\mu\nu}$ des tenseurs antisymétriques. L'opérateur $(a^\nu P_\nu + \frac{1}{2}\omega^{\nu\rho} L_{\nu\rho})$ est un scalaire.

[3] Cette affirmation n'est pas vraiment correcte, les quatre composantes d'un quadrivecteur combinent un spin 1 et un spin 0.

alors que

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = Q_\alpha Q_\beta + Q_\beta Q_\alpha = -2(\gamma^\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu, \tag{3.8}$$

où C est la matrice de conjugaison de charge de Dirac. D'après ces dernières relations, la supersymétrie est une superalgèbre dont le secteur fermionique comprenant les Q_α vérifie des règles d'anticommutation. Une transformation de supersymétrie, générée par Q_α, peut donc être vue comme la *"racine carrée" d'une translation*, générée par P_μ. Un théorème (de Haag, Łopuszanski et Sohnius) affirme en fait que dans le cadre de la théorie de champs locale, la supersymétrie est la seule extension de l'algèbre de Poincaré qui ne contienne pas la symétrie conforme.

La groupe de Poincaré agit sur les champs locaux tels que le champ scalaire $\varphi(x)$, le champ vectoriel $V_\mu(x)$ ou le champ spinoriel $\psi(x)$. Dans chaque cas, il existe un ensemble d'opérateurs P_μ et $L_{\mu\nu}$ agissant sur les champs et vérifiant (3.5). Ceci revient à dire que les champs en question portent une représentation de l'algèbre de Poincaré. La supersymétrie ajoute les générateurs Q_α de spin 1/2 et il s'agit de déterminer les ensembles de champs porteurs d'une représentation de la supersymétrie. Ces représentations sont qualifiées de *supermultiplets* Φ. Dans chaque cas, il existera une réalisation des opérateurs Q_α et les transformations de supersymétrie seront données par

$$\delta\Phi = \bar{\epsilon}Q\Phi, \tag{3.9}$$

le paramètre de la transformation ϵ étant un spineur de Majorana, tout comme le générateur Q.

On peut en général montrer que chaque supermultiplet contient le même nombre de degrés de liberté bosoniques et fermioniques. L'origine intuitive de cette affirmation est que la transformation d'un champ de spin s sera de la forme

$$\delta(\text{spin } s) = \bar{\epsilon}Q(\text{spin } s) = (\text{spin } s \pm \frac{1}{2}), \tag{3.10}$$

puisque Q a spin 1/2. De plus, d'après (3.7), l'opérateur $P^2 = P^\mu P_\mu$ commute avec Q_α, ainsi d'ailleurs qu'avec $L_{\nu\rho}$ et P_ν. Il en découle que sa valeur propre m^2, qui est le carré de la masse du champ, est la même pour tous les champs d'un supermultiplet.

Les supermultiplets sont à la base de la construction des théories de champs supersymétriques. Ils déterminent en effet le contenu en particules compatible avec l'existence d'une supersymétrie, et, par la construction de fonctions des champs invariantes sous la supersymétrie, ils permettent de construire des densités lagrangiennes supersymétriques. Ce dernier pas utilise les techniques du *calcul tensoriel*, ou du calcul dans le *superespace*, qui seront évoquées plus bas.

3.2 Supermultiplets

Supposons que Φ est un ensemble de champs portant une représentation de la supersymétrie. Ceci signifie qu'il existe une réalisation (linéaire) des supercharges spinorielles Q_α permettant d'écrire les transformations de supersymétrie de Φ sous la forme (3.9), avec un paramètre infinitésimal constant ϵ, qui est un spineur de Majorana de composantes ϵ_α.

Les théories de champs quantiques, du fait des contraintes imposées par la renormalisabilité, ne peuvent décrire que des champs de spins 0, 1/2 ou 1. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux supermultiplets se limitant à ces valeurs du spin. Les supermultiplets apparaissant dans les théories de champs supersymétriques seront alors de deux types. Premièrement, le *multiplet chiral*, qui contient un spineur à deux composantes et un champ scalaire complexe:

$$\text{multiplet chiral :} \quad \begin{cases} z & (s=0) \\ \psi & (s=1/2) \end{cases} \tag{3.11}$$

Dans le cadre de l'extension supersymétrique minimale du modèle standard (MSSM = minimal supersymmetric standard model), les composantes des multiplets chiraux sont associées aux états suivants:

spins 1/2	spins 0
quarks	*quarks scalaires*, ou *squarks*
leptons	*leptons scalaires*, ou *sleptons*
higgsinos	bosons de higgs

Les nouveaux états imposés par la supersymétrie et absents dans le modèle standard sont indiqués en italique.

Le second supermultiplet contient les champs de jauge. Il est qualifié de *multiplet vectoriel* ou de multiplet de Yang-Mills. A chaque champ de jauge, de spin 1, est associé un fermion de Majorana, le "gaugino" ou fermion de jauge:

$$\text{multiplet vectoriel :} \quad \begin{cases} \text{vecteur } v_\mu & (s=1) \\ \text{gaugino } \lambda & (s=1/2) \end{cases} \tag{3.12}$$

Dans le MSSM, les multiplets vectoriels contiennent les états suivants:

spins 1	spins 1/2
gluons	*gluinos*
$W^\pm$, Z^0	*wino*$^\pm$, *zino*
photon	*photino*

Nous verrons plus loin que le passage à la supersymétrie locale implique l'introduction d'un troisième supermultiplet, le multiplet de supergravité, ou multiplet de jauge de la supersymétrie.

La description du MSSM n'entre pas dans le cadre de ces notes [9, 10, 11]. Le fait que toutes les composantes d'une représentation de la supersymétrie ont la même masse implique immédiatement que la supersymétrie ne peut être une symétrie exacte de la nature. Par exemple, à chaque lepton chargé, la supersymétrie impose l'existence d'un partenaire de même masse, même charge, mais de spin zéro, une implication évidemment contredite expérimentalement. La construction d'un modèle des interactions fondamentales impliquant la supersymétrie passe nécessairement par la construction de mécanismes de brisure de la supersymétrie, un sujet qui sera abordé dans la dernière partie de ces notes.

La construction explicite la plus simple des multiplets chiraux et vectoriels utilise la technique des superchamps dans le superespace. Nous allons ici donner une discussion élémentaire du multiplet chiral. Considérons un champ scalaire complexe z et un spineur de Majorana ψ, de même masse m. La densité lagrangienne pour des champs libres est

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu z^\dagger)(\partial^\mu z) - m^2 z^\dagger z + \frac{1}{2}\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi. \tag{3.13}$$

Nous cherchons des transformations (3.9) et (3.10) laissant invariante l'action $S = \int d^4x\,\mathcal{L}$. Supposons que

$$\delta z = \sqrt{2}\overline{\epsilon}_R\psi_L, \qquad \delta z^\dagger = \sqrt{2}\overline{\epsilon}_L\psi_R, \tag{3.14}$$

où les spineurs de chiralités gauche et droite sont

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi, \qquad \psi_R = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi.$$

La variation de $\mathcal{L}$ sous cette transformation du champ scalaire est

$$\delta\mathcal{L} = \sqrt{2}(\overline{\epsilon}_L\partial^\mu\psi_R)(\partial_\mu z) + \sqrt{2}(\overline{\epsilon}_R\partial^\mu\psi_L)(\partial_\mu z^\dagger) - \sqrt{2}m^2[\overline{\epsilon}_L\psi_R z + \overline{\epsilon}_R\psi_L z^\dagger].$$

Il s'agit ensuite de trouver une transformation de ψ qui compense $\delta\mathcal{L}$ à une dérivée totale $\partial_\mu(\ldots)$ près qui ne contribue pas à l'action. Un calcul sans difficulté montre que c'est le cas des transformations

$$\begin{aligned}\delta\psi_L &= -\sqrt{2}[i\gamma^\mu\epsilon_R\partial_\mu z + mz^\dagger\epsilon_L],\\ \delta\psi_R &= -\sqrt{2}[i\gamma^\mu\epsilon_L\partial_\mu z^\dagger + mz\epsilon_R].\end{aligned} \tag{3.15}$$

La théorie définie par (3.13) est donc invariante sous les transformations de supersymétrie (3.14) et (3.15). Les transformations (3.15) ont cependant une particularité: elles dépendent du paramètre m de la densité lagrangienne alors que l'algèbre de supersymétrie est évidemment indépendante du choix de la dynamique des champs. De plus, le commutateur de deux transformations de supersymétrie de paramètres ϵ_1 et ϵ_2 donne

$$[\delta_1,\delta_2]\psi = -2i(\overline{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1)[\partial_\mu\psi + \frac{i}{2}\gamma_\mu(i\gamma^\nu\partial_\nu - m)\psi],$$

qui ne se réduit à la forme exigée par l'algèbre (3.8),

$$[\delta_1,\delta_2]\psi = 2(\overline{\epsilon}_2\gamma^\mu\epsilon_1)P_\mu\psi, \qquad P_\mu = -i\partial_\mu,$$

que lorsque ψ est solution de l'équation du mouvement

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

qui découle de la lagrangienne (3.13). La réalisation de la supersymétrie (3.14) et (3.15) n'est donc valable que pour des champs solutions des équations du mouvement ("on-shell") alors que l'on cherche à trouver des transformations qui laissent l'action invariante pour n'importe quels champs apparaissant comme arguments de la fonctionnelle $\mathcal{L}$. Cette difficulté trouvera sa solution avec l'introduction des *champs auxiliaires.*

La théorie de champ interactive la plus simple qui soit supersymétrique est le modèle de Wess-Zumino, qui généralise la théorie (3.13). Sa densité lagrangienne dépend de deux paramètres, la masse m de z et ψ, et la constante de couplage λ. Elle s'écrit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WZ} &= (\partial_\mu z^\dagger)(\partial^\mu z) - m^2 z^\dagger z + \tfrac{1}{2}\overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \\ &\quad -\lambda z(\overline{\psi}_R\psi_L) - \lambda z^\dagger(\overline{\psi}_L\psi_R) - m\lambda(z^\dagger z^2 + z^{\dagger 2} z) - \lambda^2(z^\dagger z)^2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

La constante de couplage λ apparaît dans toutes les interactions (de Yukawa ou purement scalaires). Par rapport aux transformations (3.14) et (3.15), il est nécessaire de modifier $\delta\psi_L$ qui devient

$$\delta\psi_L = -\sqrt{2}[i\gamma^\mu\epsilon_R\partial_\mu z + (mz^\dagger + \lambda z^{\dagger 2})\epsilon_L], \tag{3.17}$$

qui est non-linéaire.

3.3 Un point technique: les champs auxiliaires

Reprenons le modèle de Wess-Zumino pour un multiplet chiral (z, ψ), qui est décrit par la densité lagrangienne (3.16). La théorie de champs (3.16) est en fait équivalente à

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= (\partial_\mu z^\dagger)(\partial^\mu z) + \tfrac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^\dagger f \\ &\quad -f(mz + \lambda z^2) - f^\dagger(mz^\dagger + \lambda z^{\dagger 2}) \\ &\quad -\tfrac{1}{2}\overline{\psi}_R\psi_L(m + 2\lambda z) - \tfrac{1}{2}\overline{\psi}_L\psi_R(m + 2\lambda z^\dagger).\end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous avons introduit un nouveau champ complexe, f, dont l'équation du mouvement est entièrement algébrique puisque $\partial_\mu f$ n'apparaît pas dans (3.18). Cette équation du mouvement s'écrit

$$0 = \frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial f^\dagger} = f - (mz^\dagger + \lambda z^{\dagger 2}). \tag{3.19}$$

En substituant sa solution dans (3.18), on retrouve immédiatement (3.16), ce qui prouve l'équivalence des deux théories.

Quel est l'intérêt de cette manipulation? La densité lagrangienne (3.18) est la somme de trois termes:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_{cin.} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_\lambda, \\ \mathcal{L}_{cin.} &= (\partial_\mu z^\dagger)(\partial^\mu z) + \tfrac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + f^\dagger f, \\ \mathcal{L}_m &= -m(fz + \tfrac{1}{2}\overline{\psi}_R\psi_L) - m(f^\dagger z^\dagger + \tfrac{1}{2}\overline{\psi}_L\psi_R), \\ \mathcal{L}_\lambda &= -\lambda(fz^2 + z\overline{\psi}_R\psi_L) - \lambda(f^\dagger z^{\dagger 2} + z^\dagger\overline{\psi}_L\psi_R).\end{aligned} \tag{3.20}$$

On vérifie alors facilement que chacun des trois termes $\mathcal{L}_{cin.}$, $\mathcal{L}_m$ et $\mathcal{L}_\lambda$ est invariant (à une dérivée totale près) sous les transformations de supersymétrie

$$\begin{aligned}\delta z &= \sqrt{2}\overline{\epsilon}_R\psi_L, \\ \delta\psi_L &= -\sqrt{2}(i\gamma^\mu\epsilon_R\partial_\mu z + f\epsilon_L), \\ \delta f &= \sqrt{2}i\overline{\epsilon}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L = -\sqrt{2}i\partial_\mu\overline{\psi}_R\gamma^\mu\epsilon_R.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ces transformations sont linéaires, indépendantes des paramètres de la densité lagrangienne, et elles vérifient l'algèbre de supersymétrie (3.8) sans exiger que les champs soient solutions des équations du mouvement de la théorie (c'est à dire "off-shell"):

$$[\delta_1, \delta_2] \begin{pmatrix} z \\ \psi \\ f \end{pmatrix} = 2(\bar{\epsilon}_2 \gamma^\mu \epsilon_1) P_\mu \begin{pmatrix} z \\ \psi \\ f \end{pmatrix}, \qquad P_\mu = -i\partial_\mu. \tag{3.22}$$

Notez que la substitution de la solution (3.19) dans $\delta\psi_L$ conduit à la transformation (3.17), qui est donc la transformation du spineur après avoir résolu l'équation du champ auxiliaire.

Les transformations (3.21) définissent la représentation linéaire de la supersymétrie agissant sur le multiplet chiral de composantes (z, ψ, f), dont les degrés de liberté physiques sont un champ scalaire complexe et un fermion de Majorana, puisque f est auxiliaire.

L'intérêt de l'introduction du champ auxiliaire réside dans le fait que les transformations de supersymétrie des champs (z, ψ, f) sont connues sans avoir à se référer à une action prédéterminée. Une action supersymétrique sera construite en combinant des supermultiplets tels que (z, ψ, f) selon les règles du calcul tensoriel. Par exemple, les quantités $\mathcal{L}_{cin.}$, $\mathcal{L}_m$ et $\mathcal{L}_\lambda$ qui apparaissent dans (3.20) découlent directement de ces règles.

Pour faire le lien avec la brève discussion du calcul tensoriel qui suit, il est utile de remarquer que si on introduit le *superpotentiel*

$$w(z) = \frac{1}{2} m z^2 + \frac{1}{3} \lambda z^3, \tag{3.23}$$

la densité lagrangienne (3.18) peut également s'écrire sous la forme

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{cin.} + \mathcal{L}_w, \tag{3.24}$$

où $\mathcal{L}_{cin.}$ est donné dans (3.20) et

$$\mathcal{L}_w = -f \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2} (\overline{\psi}_R \psi_L) \frac{d^2 w}{dz^2} + \text{conjugué hermitique.} \tag{3.25}$$

Le superpotentiel est une fonction de z uniquement (et non de $z^\dagger$).

3.4 Calcul tensoriel

Pour donner un exemple de calcul tensoriel, considérons encore le multiplet chiral (z, ψ, f) dont les transformations de supersymétrie sont données dans (3.21). Nous allons construire un multiplet chiral de composantes (Z, Ψ, F) dont la première composante est une fonction analytique de z quelconque,

$$Z = g(z). \tag{3.26}$$

Alors, d'après (3.21),

$$\delta Z = \frac{dg}{dz}\delta z = \sqrt{2}\frac{dg}{dz}\overline{\epsilon}_R\psi_L.$$

Ceci suggère que la deuxième composante du multiplet est

$$\Psi = \frac{dg}{dz}\psi. \tag{3.27}$$

Il vient ensuite

$$\begin{aligned}\delta\Psi_L &= \frac{dg}{dz}\delta\psi_L + \frac{d^2g}{dz^2}\psi_L\delta z = -\sqrt{2}\frac{dg}{dz}f\epsilon_L - \sqrt{2}i\gamma^\mu\epsilon_R\frac{dg}{dz}(\partial_\mu z) + \sqrt{2}\frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\epsilon}_R\psi_L)\psi_L \\ &= -\sqrt{2}\left[\frac{dg}{dz}f + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\psi}_R\psi_L)\right]\epsilon_L - \sqrt{2}i\gamma^\mu\epsilon_R(\partial_\mu g),\end{aligned}$$

avec l'aide d'un réarrangement de Fierz des spineurs ψ et ϵ. Par comparaison avec la transformation de ψ_L (3.21), on en déduit que la composante auxiliaire du multiplet est

$$F = \frac{dg}{dz}f + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\psi}_R\psi_L). \tag{3.28}$$

Sa transformation est

$$\begin{aligned}\delta F &= \frac{dg}{dz}\delta f + \frac{d^2g}{dz^2}f\delta z + \frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\psi}_R\delta\psi_L) + \frac{1}{2}\frac{d^3g}{dz^3}(\overline{\psi}_R\psi_L)\delta z \\ &= -\sqrt{2}i\left[\frac{dg}{dz}\partial_\mu\overline{\psi}_R + \frac{d^2g}{dz^2}\overline{\psi}_R\partial_\mu z\right]\gamma^\mu\epsilon_R = -\sqrt{2}i\partial_\mu\left[\frac{dg}{dz}\overline{\psi}_R\right]\gamma^\mu\epsilon_R \\ &= -\sqrt{2}i\partial_\mu\overline{\Psi}_R\gamma^\mu\epsilon_R,\end{aligned}$$

comme il se doit d'après (3.21). Ce calcul utilise le fait que

$$(\overline{\psi}_R\psi_L)\delta z = \sqrt{2}(\overline{\psi}_R\psi_L)(\overline{\epsilon}_R\psi_L) = 0.$$

Nous avons donc construit un multiplet chiral de composantes

$$\left(Z = g(z) \quad , \quad \Psi = \frac{dg}{dz}\psi \quad , \quad F = \frac{dg}{dz}f + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\psi}_R\psi_L)\right), \tag{3.29}$$

à partir du multiplet chiral (z, ψ, f). Le fait que le champ auxiliaire F se transforme avec une dérivée totale, $\delta F = \partial_\mu(\ldots)$, indique que la quantité

$$S_g = \int d^4x\,\mathcal{L}_g = \int d^4x\,F = \int d^4x\left[\frac{dg}{dz}f + \frac{1}{2}\frac{d^2g}{dz^2}(\overline{\psi}_R\psi_L)\right] \tag{3.30}$$

est un invariant de supersymétrie. Le champ auxiliaire F, qui est entièrement défini par la fonction $g(z)$, peut donc être directement utilisé comme l'un des termes d'une densité lagrangienne. En comparant avec (3.20) et (3.25), on constate que les choix

$$\begin{aligned} g(z) &= \tfrac{1}{2}mz^2 &\longrightarrow\quad F &= m[fz + \tfrac{1}{2}(\overline{\psi}_R\psi_L)], \\ g(z) &= \tfrac{1}{3}\lambda z^3 &\longrightarrow\quad F &= \lambda[fz^2 + \lambda z(\overline{\psi}_R\psi_L)], \\ g(z) &= w(z) &\longrightarrow\quad F &= \tfrac{dw}{dz}f + \tfrac{1}{2}\tfrac{d^2w}{dz^2}(\overline{\psi}_R\psi_L),\end{aligned} \tag{3.31}$$

conduisent directement à $\mathcal{L}_m$, $\mathcal{L}_\lambda$ et $\mathcal{L}_w$, en ajoutant le conjugué hermitique. Cet argument prouve l'invariance supersymétrique de ces trois quantités, qui sont qualifiées de densités chirales F. Si on désigne par Σ le multiplet chiral (z, ψ, f), la densité lagrangienne $\mathcal{L}_g$ apparaissant dans (3.30) sera notée

$$[g(\Sigma)]_F,$$

afin de mettre en évidence qu'il s'agit de la composante auxiliaire F du multiplet chiral de première composante $g(z)$.

Les termes cinétiques $\mathcal{L}_{cin.}$ de (3.20) ne peuvent être obtenus à partir d'une densité chirale $[\ldots]_F$. Ils sont en fait donnés par la composante la plus haute d'un multiplet vectoriel formé à partir du multiplet chiral Σ et de son conjugué $\overline{\Sigma}$. L'argument est similaire au cas chiral discuté ci-dessus. Il s'agit de construire un multiplet vectoriel dont la composante la plus basse est la fonction réelle

$$\Phi(z, z^\dagger).$$

On montre alors que l'expression

$$\begin{aligned} \int d^4x\, \mathcal{L}_D &= \int d^4x \left\{ \Phi_{zz^\dagger} \left[(\partial_\mu z)(\partial^\mu z^\dagger) + f^\dagger f + \tfrac{i}{2} \overline{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right] \right. \\ &\quad - \tfrac{i}{4} \overline{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi [\Phi_{zzz^\dagger} \partial^\mu z - \Phi_{z^\dagger z^\dagger z} \partial^\mu z^\dagger] + \tfrac{1}{4} \Phi_{zzz^\dagger z^\dagger} (\overline{\psi}_L \psi_R)(\overline{\psi}_R \psi_L) \\ &\quad \left. + \tfrac{1}{2} \Phi_{zzz^\dagger} (\overline{\psi}_R \psi_L) f^\dagger + \tfrac{1}{2} \Phi_{zz^\dagger z^\dagger} (\overline{\psi}_L \psi_R) f \right\}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

avec la notation

$$\Phi_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \qquad \Phi_{zz^\dagger} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial z^\dagger}, \qquad \ldots,$$

est invariante de supersymétrie. On notera cette densité vectorielle

$$\mathcal{L}_D = [\Phi(\Sigma)]_D.$$

En choisissant $\Phi(\Sigma, \overline{\Sigma}) = \overline{\Sigma}\Sigma$, on retrouve les termes cinétiques du modèle de Wess-Zumino (3.20), qui s'écrit donc symboliquement sous la forme

$$\mathcal{L}_{WZ} = [\overline{\Sigma}\Sigma]_D + ([\frac{1}{3}\lambda\Sigma^3 + \frac{1}{2}m\Sigma^2]_F + \text{h.c.}).$$

Pour des fonctions Φ et g arbitraires, la somme des expressions (3.30) et (3.32) est l'action du modèle σ non-linéaire supersymétrique.

3.5 Superespace et superchamps

D'après l'algèbre (3.8), la supersymétrie peut être vue comme "la racine carrée d'une translation". L'action d'une translation sur les coordonnées d'espace-temps est

$$x^\mu \longrightarrow x^\mu + ia^\nu P_\nu x^\mu, \qquad P_\nu = -i\partial_\nu.$$

Les générateurs de l'algèbre de Poincaré dans l'espace-temps peuvent être représentés par les opérateurs différentiels (3.4). Ils déterminent en agissant sur un champ $\varphi(x)$ les transformations de Poincaré de ce champ. Il est tentant d'étendre l'espace-temps de manière à représenter les générateurs de l'algèbre de supersymétrie par des opérateurs différentiels agissant dans ce nouvel espace qualifié de *superespace*. Une représentation de la supersymétrie sera alors facilement obtenue au moyen d'une fonction dans le superespace. Cette construction est cependant d'intérêt technique uniquement. Il n'est pas question d'associer un concept physique à la notion de superespace.

Sur une fonction scalaire $f(x)$, une translation $x^\mu \to x^\mu + a^\mu$ s'écrit

$$f(x+a) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(a \frac{d}{dx} \right)^n f(x) = e^{a^\mu \partial_\mu} f(x) = e^{i a^\mu P_\mu} f(x).$$

Le paramètre de la transformation est un vecteur a^μ. Pour une transformation de supersymétrie, le paramètre est un spineur de Majorana ϵ. Supposons que Φ soit une fonction dans le superespace à définir, de coordonnées X. Une transformation de supersymétrie agira par

$$e^{\overline{\epsilon} Q} \Phi,$$

où Q est l'opérateur différentiel représentant le générateur de la supersymétrie dans le superespace. Deux transformations successives amènent à considérer

$$e^{\overline{\epsilon}_1 Q} e^{\overline{\epsilon}_2 Q} \Phi = e^{\{(\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2) Q + \frac{1}{2} [\overline{\epsilon}_1 Q, \overline{\epsilon}_2 Q] + \ldots\}} \Phi.$$

Si les spineurs Q, ϵ_1 et ϵ_2 anticommutent,

$$[\overline{\epsilon}_1 Q, \overline{\epsilon}_2 Q] = -\overline{\epsilon}_1^\alpha \overline{\epsilon}_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} = 2 \overline{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 P_\mu,$$

en utilisant l'algèbre de supersymétrie (3.8) et la condition de Majorana $\epsilon_2 = C \overline{\epsilon}_2^\tau$. Donc

$$e^{\overline{\epsilon}_1 Q} e^{\overline{\epsilon}_2 Q} \Phi = e^{\{(\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2) Q + \overline{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 P_\mu\}} \Phi,$$

puisque $[Q_\alpha, P_\mu] = 0$. Si Q est un opérateur différentiel dans le superespace, c'est encore le cas de $(\overline{\epsilon}_1 + \overline{\epsilon}_2) Q + \overline{\epsilon}_1 \gamma^\mu \epsilon_2 P_\mu$.

Pour réaliser les supercharges Q, il est convenable de passer à un formalisme à deux composantes [4], dans lequel

$$Q = \begin{pmatrix} Q_\alpha \\ \overline{Q}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \overline{\epsilon}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \qquad \alpha, \dot\alpha = 1, 2. \tag{3.33}$$

Pour définir le superespace, on introduit des coordonnées anticommutantes θ_α et $\overline{\theta}^{\dot\alpha}$ (variables de Grassmann), de même nature que le paramètre ϵ:

$$\begin{aligned} \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\overline{\theta}^{\dot\alpha}, \overline{\theta}^{\dot\beta}\} = \{\theta_\alpha, \overline{\theta}^{\dot\beta}\} = 0; \\ \{\theta_\alpha, \text{spineur}\} = \{\overline{\theta}_{\dot\alpha}, \text{spineur}\} = 0. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Un point dans le superespace a pour coordonnées

$$X = (x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}),$$

et un *superchamp* est une fonction (on un ensemble de fonctions) dans le superespace, par exemple $V(x,\theta,\overline{\theta})$. Les opérateurs différentiels

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= -i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + (\sigma^\mu\overline{\theta})_\alpha\partial_\mu, \\ \overline{Q}_{\dot\alpha} &= i\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} - (\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu, \end{aligned} \tag{3.35}$$

qui satisfont l'algèbre de supersymétrie (3.8), agissent sur les superchamps $V(x,\theta,\overline{\theta})$ pour générer les transformations de supersymétrie. Pour ϵ infinitésimal,

$$\delta V(x,\theta,\overline{\theta}) = [\epsilon^\alpha Q_\alpha + \overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}]\, V(x,\theta,\overline{\theta}).$$

A chaque supermultiplet correspond un superchamp. Puisque $\theta^\alpha\theta^\beta\theta^\gamma = 0$, le développement en puissances de θ d'un superchamp $V(x,\theta,\overline{\theta})$ aura un nombre fini de termes. On l'écrit conventionnellement:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\overline{\theta}) &= C(x) + i\theta\chi(x) - i\overline{\theta}\overline{\chi}(x) + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}v_\mu(x) + \tfrac{i}{2}\theta\theta m^\dagger(x) - \tfrac{i}{2}\overline{\theta}\overline{\theta}m(x) \\ &\quad + i\theta\theta\overline{\theta}[\overline{\lambda}(x) + \tfrac{i}{2}\partial_\mu\chi(x)\sigma^\mu] - i\overline{\theta}\overline{\theta}\theta[\lambda(x) - \tfrac{i}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}(x)] \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}[D(x) + \tfrac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu C(x)]. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Pour un superchamp réel, $V = V^\dagger$, les champs $(C,\chi,m,v_\mu,\lambda,D)$ correspondent aux composantes d'un multiplet vectoriel. Les composantes bosoniques C, V_μ, m et D comprennent huit degrés de liberté; c'est également le cas des composantes fermioniques χ et λ, qui sont des spineurs de Majorana. L'égalité du nombre de bosons et de fermions est donc immédiatement satisfaite. Nous verrons plus loin que ce superchamp est utilisé comme multiplet de jauge lors de la construction de théories de jauge supersymétriques.

Le superchamp chiral sera obtenu en imposant une contrainte invariante de supersymétrie à un superchamp $\phi(x,\theta,\overline{\theta})$ de la forme (3.36). On observe tout d'abord que l'opérateur

$$\overline{D}_{\dot\alpha} = \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu, \tag{3.37}$$

vérifie par construction

$$\{\overline{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0.$$

Il est alors légitime d'imposer la contrainte

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Sigma(x,\theta,\overline{\theta}) = 0 \tag{3.38}$$

à un superchamp quelconque Σ puisque celle-ci est invariante de supersymétrie:

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\,\delta\Sigma = [\epsilon^\beta Q_\beta + \overline{\epsilon}_{\dot\beta}\overline{Q}^{\dot\beta}]\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Sigma = 0.$$

La condition (3.38) a pour solution

$$\begin{aligned} \Sigma(x,\theta,\overline{\theta}) &= z(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) - \theta\theta f(y) \qquad\qquad (y^\mu = x^\mu - i\overline{\theta}\sigma^\mu\theta) \\ &= z(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \theta\theta f(x) \\ &\quad - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu z(x) + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta(\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\overline{\theta}) - \tfrac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta}\overline{\theta}\partial^\mu\partial_\mu z(x). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Le superchamp Σ contient les champs (z, ψ, f), qui correspondent précisément aux composantes du multiplet chiral construit plus haut. Le conjugué $\overline{\Sigma} = \Sigma^\dagger$ satisfait la condition d'antichiralité

$$D_\alpha \overline{\Sigma} = 0, \qquad D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i(\sigma^\mu \overline{\theta})_\alpha \partial_\mu,$$

qui est également invariante de supersymétrie.

L'intérêt de l'utilisation de superchamps pour la construction de théories supersymétriques réside dans la simplification du calcul tensoriel. Un superchamp rassemble les composantes d'un supermultiplet vectoriel ou chiral dans une seule fonction dans le superespace. N'importe quelle fonction de superchamps aura donc une transformation de supersymétrie bien déterminée. En effet, toute fonction d'un superchamp est elle-même un superchamp. Par exemple, si $\Sigma(x, \theta, \overline{\theta})$ est un superchamp chiral (3.39), alors une fonction $g(\Sigma)$ est encore un superchamp chiral puisque

$$\overline{D}_{\dot{\alpha}} g(\Sigma) = \frac{dg}{d\Sigma} \overline{D}_{\dot{\alpha}} \Sigma = 0.$$

La transformation de $g(\Sigma)$ est

$$\delta g(\Sigma) = \frac{dg}{d\Sigma} \delta \Sigma = \frac{dg}{d\Sigma} [\epsilon^\alpha Q_\alpha + \overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \overline{Q}^{\dot{\alpha}}] \Sigma,$$

et l'action de la supersymétrie sur $g(\Sigma)$ est déterminée. On vérifie facilement que l'expansion en puissance de θ, $\overline{\theta}$ de $g(\Sigma)$ fait apparaître les composantes (Z, Ψ, F) obtenues dans l'expression (3.29).

3.6 Théories de jauge supersymétriques

La construction d'une théorie de jauge supersymétrique est particulièrement simple dans le formalisme des superchamps. Considérons un ensemble de supermultiplets chiraux, notés collectivement au moyen du superchamp Σ, qui satisfait donc la contrainte (3.38). Ils décrivent des particules de spin 0 et 1/2. La dynamique est décrite par la densité lagrangienne

$$\mathcal{L}_1 = [\phi(\overline{\Sigma}, \Sigma)]_D + ([g(\Sigma)]_F + \text{h.c.}), \tag{3.40}$$

où les deux termes correspondent à la densité chirale (3.30) et à la densité vectorielle (3.32). Nous désirons rendre cette théorie invariante sous un groupe G de transformations de jauge. Il est impossible de considérer des transformations de la forme

$$\Sigma \qquad \longrightarrow \qquad \Sigma' = e^{iA(x)} \Sigma,$$

où $A(x)$ est un élément de l'algèbre de Lie de G. Pour que cette transformation soit compatible avec la supersymétrie, il faudrait que $\overline{D}_{\dot{\alpha}} \Sigma' = 0$, ce qui n'est pas le cas puisque $\overline{D}_{\dot{\alpha}} A(x) \neq 0$: une fonction $A(x)$ n'est pas un superchamp. Une transformation de jauge supersymétrique sera donc de la forme

$$\Sigma \qquad \longrightarrow \qquad \Sigma' = e^{i\Lambda} \Sigma, \tag{3.41}$$

où Λ est lui-même un superchamp chiral à valeur dans l'algèbre de Lie de G. La transformation du superchamp antichiral sera

$$\overline{\Sigma} \qquad \longrightarrow \qquad \overline{\Sigma}' = \overline{\Sigma} e^{-i\overline{\Lambda}}, \tag{3.42}$$

qui vérifie bien $D_\alpha \overline{\Sigma}' = 0$. L'introduction des champs de jauge se fait par l'intermédiaire d'un superchamp vectoriel V à valeur dans l'algèbre de Lie de G, avec les transformations de jauge

$$e^V \qquad \longrightarrow \qquad (e^V)' = e^{i\overline{\Lambda}} e^V e^{-i\Lambda}, \tag{3.43}$$

qui préservent l'hermiticité $V = V^\dagger$. Les paramètres de cette transformation sont les composantes $(z_\Lambda, \psi_\Lambda, f_\Lambda)$ du superchamp chiral Λ. Une transformation de jauge usuelle a pour paramètre une seule fonction réelle: la transformation supersymétrique (3.43) est donc bien plus riche, et il est possible d'utiliser cette richesse pour choisir une forme du superchamp V plus simple que (3.36). Puisque les paramètres de la transformation de jauge habituelle correspondent aux fonctions $\mathrm{Re}\, z_\Lambda(x)$, on peut choisir une jauge appropriée pour $\mathrm{Im}\, z_\Lambda(x)$, $\psi_\Lambda(x)$ et $f_\Lambda(x)$ sans pour autant fixer l'invariance de jauge. Par exemple, les composantes $(C, \chi, m, v_\mu \lambda, D)$ de V' dans (3.43) peuvent être simplifiée en demandant

$$C = 0, \qquad \chi = 0, \qquad m = 0,$$

par un choix de $\mathrm{Im}\, z_\Lambda$, ψ_Λ et f_Λ, respectivement. Ce choix correspond à la *jauge de Wess-Zumino*, où le multiplet vectoriel ne contient que les champs de jauge v_μ, les gauginos λ ainsi qu'un champ D qui sera auxiliaire, et donc sans degré de liberté physique. Le super-multiplet vectoriel (3.12) est donc décrit au moyen d'un superchamp réel, dans la jauge de Wess-Zumino. Il importe de remarquer que l'invariance de jauge est indispensable à l'existence de la jauge de Wess-Zumino et donc à la description du multiplet vectoriel (3.12). Dans une théorie de champ non supersymétrique, c'est la renormalisabilité de la théorie quantique qui exige qu'un champ vectoriel v_μ soit associé à une symétrie de jauge. Dans le cas supersymétrique, la nécessité d'une symétrie de jauge apparaît au niveau de la théorie classique déjà, pour décrire le multiplet (champ de jauge–gaugino).

On remarque ensuite que la combinaison

$$\mathrm{Tr}\, \overline{\Sigma} e^V \Sigma$$

est invariante de jauge. Plus généralement, une fonction réelle

$$\Phi(\overline{\Sigma} e^V, \Sigma)$$

sera invariante de jauge. En utilisant la formule de densité (3.32), l'expression

$$\int d^4x\, [\Phi(\overline{\Sigma} e^V, \Sigma)]_D \tag{3.44}$$

donne une action qui est à la fois supersymétrique et invariante de jauge. Elle ne contient cependant pas de termes de propagation des champs de jauge et des gauginos. L'introduction de tels termes n'est pas triviale. On doit définir un superchamp chiral

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \overline{D}\overline{D} e^{-V} D_\alpha e^V, \qquad \overline{D}_{\dot\alpha} W_\alpha = 0, \tag{3.45}$$

dont la transformation de jauge est

$$W_\alpha \quad \longrightarrow \quad W'_\alpha = e^{i\Lambda} W_\alpha e^{-i\Lambda}, \qquad \overline{D}_{\dot\alpha} W'_\alpha = 0. \tag{3.46}$$

L'expression invariante de jauge et de supersymétrie

$$\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}[W^\alpha W_\alpha]_F + \mathrm{h.c.} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}\,\overline{\lambda}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,D^2,$$

contient alors les termes cinétiques des champs de jauge et des gauginos ainsi qu'un terme auxiliaire. Sa généralisation est l'expression

$$\frac{1}{4}[\mathrm{Tr}\,f(\Sigma)W^\alpha W_\alpha]_F + \mathrm{h.c.},$$

la fonction f devant être choisie de manière à assurer l'invariance de jauge.

La densité lagrangienne supersymétrique et invariante de jauge la plus générale construite à partir d'un ensemble de multiplets chiraux Σ et du multiplet de jauge V est alors [4]

$$\mathcal{L} = [\Phi(\overline{\Sigma}e^V, \Sigma)]_D + ([\frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\,f(\Sigma)W^\alpha W_\alpha + g(\Sigma)]_F + \mathrm{h.c.}), \tag{3.47}$$

les fonctions f et g devant être choisies de manière à obtenir des expressions invariantes de jauge. Il est sous-entendu que l'expansion en composantes de cette théorie utilise les formules de densité (3.30) et (3.32). Le couplage de cette expression à la gravitation nous conduira à la forme générale de la supergravité couplée à la matière (les multiplets chiraux Σ) et à un multiplet de jauge (le superchamp V).

3.7 Supersymétrie locale: la supergravité

Les équations d'Einstein de la gravitation dérivent de l'action

$$S = \int d^4x\,\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2\kappa^2}R + \mathcal{L}_{mat.}\right], \tag{3.48}$$

où g est le déterminant de la métrique $g_{\mu\nu}$ et $\mathcal{L}_{mat.}$ est la densité lagrangienne de la matière. Cette action est invariante sous les transformations *locales* de coordonnées, $x^\mu \longrightarrow x'^\mu(x)$. En fait, cette théorie peut être vue comme une théorie de jauge, la symétrie de jauge étant ici les transformations locales de coordonnées. La supersymétrie fournit une extension des symétries globales de l'espace-temps, du groupe de Poincaré, dont les représentations rassemblent des particules de spins différents. Puisque l'algèbre (3.8) lie supersymétrie et translations, la cohabitation de la relativité générale et de la supersymétrie exige de considérer également des transformations locales de supersymétrie. L'extension supersymétrique de l'action

$$-\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\,\sqrt{-g}R \tag{3.49}$$

est la théorie de supergravité pure, alors que celle de l'action (3.48) est la supergravité couplée à la matière.

[4] Cette expression correspond en fait à un groupe de jauge simple; l'extension à un groupe tel que $SU(3)\times S(2)\times U(1)$ ne présente pas de difficulté particulière et ne sera pas utile ici.

L'analogie avec les théories de jauge est fructueuse. Considérons un champ de spin 1/2 et de masse m, dont la densité lagrangienne libre est

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi.$$

$\mathcal{L}$ possède une symétrie globale continue $U(1)$,

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\alpha q}\psi,$$

où le nombre réel q est la charge de ψ (le générateur de l'algèbre de Lie de $U(1)$) et α le paramètre de la transformation. Passer à la symétrie locale

$$\alpha \longrightarrow \alpha(x),$$

exige deux modifications de la densité lagrangienne $\mathcal{L}$. Premièrement, la dérivée ∂_μ doit être rendue covariante en introduisant le champ de jauge $A_\mu(x)$. La transformation de jauge de A_μ est obtenue en postulant que la dérivée covariante

$$D_\mu\psi = \partial_\mu\psi - iqA_\mu\psi$$

ait la même transformation de jauge que le champ ψ, c'est à dire

$$D_\mu\psi \longrightarrow (D_\mu\psi)' = e^{i\alpha(x)q}D_\mu\psi.$$

C'est le cas si la transformation du champ de jauge est

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \delta A_\mu, \qquad \delta A_\mu = \partial_\mu\alpha(x).$$

Deuxièmement, il s'agit d'ajouter à la densité lagrangienne un terme invariant de jauge qui assure la propagation du champ de jauge A_μ:

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu D^\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.50}$$

où

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.51}$$

est la courbure du champ de jauge (ou potentiel de jauge) A_μ. L'expression (3.50) est la densité lagrangienne de l'électrodynamique d'un fermion de charge q, A_μ étant le champ du photon. Le point central de la procédure est l'introduction d'un champ de jauge dont les caractéristiques d'espace-temps dépendent de celles du paramètre local de la symétrie, puisqu'il s'agit de compenser des termes proportionnels à la dérivée ∂_μ de celui-ci. Dans le cas ci-dessus, le paramètre est une fonction scalaire $\alpha(x)$, de "spin zéro", le champ de jauge sera donc $A_\mu(x)$, de spin unité. Cette procédure simple et bien connue peut être transposée au cas de la supersymétrie, au prix malheureusement d'une complexité technique bien plus élevée.

La relativité générale et son action (3.48) peut également être vue comme une théorie de jauge du groupe de Poincaré [14]. Au point x^μ de l'espace-temps (courbe, en général), une transformation de Poincaré aura des paramètres $\omega^{mn}(x)$ pour les transformations de Lorentz, et $a^m(x)$ pour les translations. Les indices m, n sont des indices vectoriels dans l'espace-temps de Minkowski (plat) tangent au point x, et les générateurs du groupe de Poincaré sont L_{mn} et P_m. Les champs de jauge correspondants, introduits pour compenser des termes avec $\partial_\mu\omega^{mn}$ et $\partial_\mu a^m$ seront la *connexion de spin* ω_μ^{mn} et le *vierbein* e_μ^m. L'action (3.49), exprimée en fonction de ces champs de jauge, donne des équations du mouvement algébriques pour la connexion de spin. Celle-ci s'exprime alors en fonction du vierbein et ne contient pas de degrés de liberté physiques. La théorie (3.49) décrit donc la dynamique du vierbein, ou du tenseur métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{mn} e_\mu^m e_\nu^n,$$

qui contient le graviton de spin 2.

Finalement, la transformation de supersymétrie fait intervenir un paramètre spinoriel ϵ. Si on suppose que ce paramètre est maintenant local, $\epsilon(x)$, la transformation de l'action fera inévitablement apparaître des termes $\partial_\mu\epsilon(x)$. Il sera donc nécessaire d'introduire un champ de jauge de la supersymétrie dont la transformation compensera des termes proportionnels à $\partial_\mu\epsilon$. C'est le *gravitino* $\psi_\mu(x)$, de spin 3/2 puisque ϵ a spin 1/2.

Pour jouer son rôle de champ de jauge, le gravitino devra posséder certaines lois de transformation de supersymétrie. Comme la supersymétrie relie les bosons et les fermions, le gravitino sera membre d'une représentation de la supersymétrie et il sera partenaire d'un champ de spin $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$. Cependant, l'introduction d'un champ de jauge de la supersymétrie ne peut se faire sans introduire de champs de jauge pour les transformations du groupe de Poincaré. Cette observation détermine la nature du partenaire supersymétrique du champ de jauge ψ_μ: puisque les degrés de liberté dynamiques de la gravitation correspondent au graviton de spin 2 contenu dans le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, il est clair que le partenaire supersymétrique du gravitino est le graviton. En résumé, les champs de jauge de la théorie de supergravité seront:

symétrie	paramètre	champ de jauge
translations	a^m	vierbein e_μ^m
Lorentz	$\omega^{mn} = -\omega^{nm}$	connexion de spin ω_μ^{mn}
supersymétrie	ϵ	gravitino ψ_μ

Les degrés de liberté physique de ces champs de jauge sont rassemblés dans le multiplet de la supergravité pure:

$$\text{supergravité pure :} \qquad \begin{cases} \psi_\mu & \text{gravitino (spin 3/2)} \\ g_{\mu\nu} & \text{graviton (spin 2)} \end{cases}$$

Nous avons mentionné plus haut que dans la formulation de la gravité qui utilise les champs de jauge ω_μ^{mn} et e_μ^m, la connexion de spin est fonction du vierbein. Ceci reste vrai dans le cas de la supergravité pure dont la densité lagrangienne est [15]:

$$\mathcal{L}_{sg} = -\frac{1}{2\kappa^2} eR - \frac{1}{4} i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\sigma, \qquad (e = \det e_\mu^m = \sqrt{-g}). \qquad (3.52)$$

Le premier terme est la densité lagrangienne de Einstein-Hilbert (3.49), alors que la dynamique du gravitino est décrite par la densité lagrangienne de Rarita-Schwinger. La dérivée covariante est de la forme

$$D_\mu\psi_\nu = \partial_\mu\psi_\nu + \frac{1}{2}\omega_\mu^{mn}\sigma_{mn}\psi_\nu, \qquad \sigma_{mn} = \frac{1}{4}[\gamma_m, \gamma_n]. \tag{3.53}$$

La construction de la théorie (3.52) est un problème technique qui ne fait pas intervenir de concept important. Comme dans le cas de la gravité formulée comme une théorie de jauge, l'équation du mouvement de la connexion de spin est algébrique et permet de l'exprimer en fonction du vierbein et du gravitino:

$$\begin{aligned}\omega_{\mu mn} &= \tfrac{1}{2}[e_m^\nu(\partial_\mu e_{n\nu} - \partial_\nu e_{n\mu}) - e_n^\nu(\partial_\mu e_{m\nu} - \partial_\nu e_{m\mu}) - e_m^\nu e_n^\rho(\partial_\nu e_{p\rho} - \partial_\rho e_{p\nu})e_\mu^p] \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\kappa^2[\overline{\psi}_\mu\gamma_m\psi_\nu e_n^\nu + \overline{\psi}_m\gamma_\mu\psi_\nu e_n^\nu - \overline{\psi}_\mu\gamma_n\psi_\nu e_m^\nu].\end{aligned}$$

Comme la connexion de spin contient elle-même des termes bilinéaires dans le gravitino, la supergravité pure (3.52) contient des interactions entre gravitons (les mêmes que dans la relativité générale), entre gravitons et gravitinos, ainsi que des interactions de gravitinos quartiques.

4 Supergravité couplée à la matière

La théorie de supergravité pure décrit la dynamique du graviton $g_{\mu\nu}$ et du gravitino ψ_μ de spin 3/2 qui joue le rôle de champ de jauge de la supersymétrie locale. Pour introduire les interactions des quarks et des leptons, il est nécessaire de coupler ce système à des champs de matière et de radiation, décrits eux-mêmes par des supermultiplets chiraux (spins 1/2 et 0) et de super-Yang-Mills (spins 1 et 1/2). La dynamique de ces champs est décrite par la théorie de jauge supersymétrique (3.47), exprimée en termes de superchamps, qui dépend de trois fonctions arbitraires Φ, g et f, avant le couplage à la gravité qui rend la supersymétrie locale.

N'importe quelle théorie de jauge supersymétrique peut être couplée à la supergravité. Il n'y a de restriction ni sur le choix du groupe de jauge, ni sur le choix des représentations des multiplets chiraux. En particulier, coupler l'extension supersymétrique minimale du modèle standard à la supergravité ne présente pas de difficulté. En fait, comme il s'agit nécessairement d'une théorie classique et que des contraintes quantiques telles que la renormalisabilité n'existent pas, le choix des interactions admissibles est beaucoup plus vaste que dans une théorie quantique de champs. Le couplage du modèle standard à la supergravité n'apporte pas de restriction sur le nombre et les valeurs de ses paramètres. La présence du gravitino, comme celle du graviton, est négligeable aux énergies accessibles à l'expérience: toutes ses interactions sont de nature gravitationnelle. Ses implications phénoménologiques relevent essentiellement du domaine de la cosmologie et de la physique de l'Univers primordial.

Dans la section 2, nous avons esquissé le principe du couplage du modèle standard (non supersymétrique) à la gravitation. La densité lagrangienne $\mathcal{L}_{ms}$ de la théorie minkowskienne (2.1) est rendue invariante sous les transformations locales de coordonnées par l'introduction de termes dépendant de $g_{\mu\nu}$ (en fait, du vierbein e_μ^m). On ajoute ensuite le terme gravitationnel

$$-\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R \tag{4.1}$$

pour obtenir l'expression recherchée:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_{ms,local}, \tag{4.2}$$

apparaissant dans (2.4). Dans le cas supersymétrique, la densité lagrangienne minkowskienne $\mathcal{L}_{ms}$ est remplacée par l'expression (3.47) de la théorie de jauge supersymétrique, appliquée par exemple au cas du modèle standard. Les formules de densité (3.30) et (3.32) donnent l'expansion en composantes de cette expression en superchamps. De même, l'expression (4.1) de la gravitation d'Einstein est remplacée par la supergravité pure (3.52). Tout le problème consiste alors à établir l'analogue de la quantité $\mathcal{L}_{ms,local}$, c'est à dire à construire les multiplets chiraux et vectoriels de la supersymétrie locale et à généraliser les formules de densité (3.30) et (3.32) au cas local. Il faut également construire le multiplet de supergravité dont les degrés de liberté physiques sont le graviton et le gravitino, mais qui contient aussi des champs auxiliaires dont le choix n'est pas unique. Dans le choix minimal, ("old minimal supergravity"), ce multiplet est formé des champs

$$(g_{\mu\nu}, \psi_\mu, A_\mu, u),$$

le champ vectoriel A_μ et le scalaire complexe u étant auxiliaires et ne se propageant pas. Le vecteur A_μ est en fait un champ de jauge d'une symétrie reliée à la structure du superespace et donc de l'algèbre de supersymétrie. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de nature essentiellement technique de la construction complexe du couplage matière–supergravité. Il existe d'ailleurs différentes approches, telles que le superespace de Poincaré ou de Kähler, ou la supergravité conforme. Le point important est qu'une généralisation des notions introduites dans le cas global (supermultiplets, formules de densité) existe pour la supergravité. Par exemple, la formule de densité chirale (3.30) pour un multiplet $g(\Sigma)$ dont les composantes (Z, Ψ, F) sont données dans (3.29) et que nous avons notée

$$[g(\Sigma)]_F = F,$$

dans le cas global, devient

$$[g(\Sigma)]_F = \sqrt{-g}\left[F + \overline{\psi}_{R\mu}\gamma^\mu\Psi_R + Z\overline{\psi}_{R\mu}\sigma^{\mu\nu}\psi_{L\nu}\right], \tag{4.3}$$

dans le cas local. Cette expression se ramène à F dans la limite $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (et donc $-g = 1$), $\psi_\mu = 0$.

Par rapport à la théorie de jauge supersymétrique (3.47), qui dépend de trois fonctions $\Phi(\overline{\Sigma}e^V, \Sigma)$, $g(\Sigma)$ et $f(\Sigma)$, une particularité de la supergravité est qu'elle ne fait intervenir que deux fonctions, f et la combinaison

$$\mathcal{G} = -3\log\Phi + gg^\dagger, \tag{4.4}$$

qui est la fonction de Kähler. Ce résultat propre à la théorie locale est une conséquence de l'invariance de Kähler du couplage à la supergravité, ou de la présence du champ de jauge auxiliaire A_μ. Il en résulte qu'une théorie de supergravité couplée à la matière est entièrement déterminée par la donnée de deux fonctions, la fonction de Kähler $\mathcal{G}(\overline{\Sigma}e^V, \Sigma)$, qui est réelle et invariante de jauge, et la fonction analytique $f(\Sigma)$ qui détermine les termes cinétiques des champs de jauge. A part les conditions dues à l'invariance de jauge, ces deux fonctions sont arbitraires, puisque la théorie de supergravité qui en résulte n'est jamais renormalisable.

Nous ne donnerons pas ici l'expression complète de la densité lagrangienne, qui a été établie par Cremmer, Ferrara, Girardello et Van Proeyen [16] (voir également [4, 17]). Nous nous concentrerons sur les termes utiles à l'étude du mécanisme de brisure spontanée de la supersymétrie locale, c'est à dire au secteur scalaire de la théorie ainsi qu'aux couplages du gravitino aux fermions chiraux. Pour rester général, nous allons considérer un ensemble de multiplets chiraux Σ^i de composantes (z^i, ψ^i, f^i), ainsi qu'un multiplet de jauge contenant les champs de jauge v_μ^a, les gauginos λ^a et des champs auxiliaires D^a. L'indice a parcourt les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de jauge G, alors que i se réfère aux composantes d'une représentation quelconque et en général réductible de cette algèbre. Nous allons également utiliser la forme générale des termes cinétiques du multiplet de Yang-Mills, valable pour un groupe de jauge quelconque. Il convient alors de remplacer le terme $\frac{1}{4}[\mathrm{Tr}\, f(\Sigma)W^\alpha W_\alpha]_F + \mathrm{h.c.}$ de l'expression (3.47) par

$$\frac{1}{4}[f_{ab}(\Sigma^i)W^{a\alpha}W_\alpha^b]_F + \mathrm{h.c.}, \tag{4.5}$$

où W_α^a est le superchamp de la courbure du champ de jauge v_μ^a, défini par l'équation (3.45). Il convient de choisir $f_{ab}(\Sigma^i)$ de manière à obtenir une expression (4.5) qui soit invariante sous les transformations de jauge (3.41) et (3.46). Finalement, comme les champs auxiliaires f^i et D^a ont des équations du mouvement algébriques, ils peuvent être facilement éliminés de la densité lagrangienne et nous n'écrirons que des expressions obtenues après cette élimination. Nous prendrons enfin des unités où $\kappa = 1$.

Avec ces conventions, les termes bosoniques de la densité lagrangienne sont

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L}_{bos.} &= -\tfrac{1}{2}R + \mathcal{G}_i^j(D_\mu z^i)(D^\mu z_j^\dagger) - V(z^j, z_j^\dagger) \\ &\quad -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Re}\, f_{ab}\, F_{\mu\nu}^a F^{b\,\mu\nu} + \tfrac{i}{8}\,\mathrm{Im}\, f_{ab}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}^a F_{\rho\sigma}^b, \end{aligned} \tag{4.6}$$

où f_{ab} est une fonction de z^i seulement et

$$\mathcal{G}_i = \frac{\partial}{\partial z^i}\mathcal{G}(z_j^\dagger, z^j), \qquad \mathcal{G}_i^j = \frac{\partial^2}{\partial z^i \partial z_j^\dagger}\mathcal{G}(z_k^\dagger, z^k), \qquad \ldots, \tag{4.7}$$

et $D_\mu z^i$ est la dérivée covariante de jauge du champ scalaire. La positivité de l'énergie cinétique des champs scalaires et de jauge implique la positivité des matrices $\mathcal{G}_j^i$ et $\mathrm{Re}\, f_{ab}$. Le potentiel des champs scalaires s'écrit

$$V(z^j, z_j^\dagger) = e^{\mathcal{G}}\left[\mathcal{G}^i\mathcal{G}_j(\mathcal{G}^{-1})_i^j - 3\right] + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\, f_{ab}\left[\mathcal{G}_i(T^a z)^i\right]\left[\mathcal{G}_i(T^b z)^i\right]. \tag{4.8}$$

Le deuxième terme est positif ou nul. Il fait intervenir les générateurs T^a du groupe de jauge. L'état du vide de la théorie est déterminé à partir des valeurs $\langle z^i\rangle$ des champs scalaires qui correspondent aux extrêma de ce potentiel. Elles vérifient

$$\langle\frac{\partial}{\partial z^i}V(z^j, z_j^\dagger)\rangle = 0. \tag{4.9}$$

D'autre part, si la valeur sur le vide du potentiel, $\langle V\rangle = V(\langle z^j\rangle, \langle z_j^\dagger\rangle)$, ne s'annule pas, $\mathcal{L}_{bos.}$ contient les termes gravitationnels

$$-e[\frac{1}{2}R + \langle V\rangle],$$

et $\langle V \rangle$ génère une constante cosmologique. Pour obtenir un état du vide minkowskien, il faut exiger l'annulation de la constante cosmologique,

$$\langle V(z, z^\dagger) \rangle = 0. \tag{4.10}$$

Dans ce cas, $\langle z^i \rangle$ doit correspondre à un minimum du potentiel afin de minimiser l'énergie et assurer la stabilité du vide. La matrice des deuxièmes dérivées

$$\begin{pmatrix} V^i_j & V^{ik} \\ V_{jl} & V^k_l \end{pmatrix},$$

en utilisant une notation analogue à (4.7), doit alors être positive. Il faut noter que les deux conditions (4.9) et (4.10), auxquelles s'ajoute la positivité des deuxièmes dérivées, n'ont de solutions que pour des choix particuliers de la fonction $\mathcal{G}$ qui définit la théorie. Un exemple remarquable pour un unique champ scalaire (et sans groupe de jauge) est

$$\mathcal{G} = -3 \log(z + z^\dagger),$$

pour lequel

$$V(z, z^\dagger) = e^{\mathcal{G}} \left[\mathcal{G}_z \mathcal{G}_{z^\dagger} \mathcal{G}^{-1}_{zz^\dagger} - 3 \right] \equiv 0;$$

dans ce cas particulier, le potentiel scalaire s'annule pour toutes les valeurs de z et l'état du vide est infiniment dégénéré avec constante cosmologique nulle. Chaque valeur sur le vide $\langle z \rangle$ est une solution des équations de la théorie, qui ne détermine donc pas d'échelle d'énergie. La généralisation de ce mécanisme est à la base des modèles de supergravités dits "no-scale" [12] qui apparaissent de manière naturelle dans la supergravité effective obtenue dans les théories de supercordes, pour les énergies faibles face à la masse de Planck.

Finalement, pour discuter de la brisure spontanée de la supersymétrie, il est utile de connaître également les termes de la densité lagrangienne bilinéaires dans les fermions et impliquant le gravitino ψ_μ. Ces termes sont:

$$\begin{aligned} e^{-1}\mathcal{L}_{3/2-1/2} &= -\tfrac{1}{4} i e^{-1} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \overline{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \partial_\rho \psi_\sigma + e^{\mathcal{G}/2} \overline{\psi}_\mu \sigma^{\mu\nu} \psi_\nu \\ &\quad - \left\{ \overline{\psi}_{R\mu} \gamma^\mu \left[e^{\mathcal{G}/2} \mathcal{G}_i \psi^i_R - \tfrac{1}{2} \mathcal{G}_j (T^a z)^j \lambda^a_R \right] + \text{h.c.} \right\}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

La première ligne contient les termes cinétique et de masse du gravitino. Les termes de mélange qui apparaissent dans la seconde joueront un rôle dans le mécanisme du "super-Higgs".

5 Brisure spontanée de la supersymétrie locale

La supersymétrie, locale ou globale, n'est pas une symétrie exacte de la nature. La supergravité possède cependant un mécanisme de brisure spontanée de la supersymétrie, le mécanisme du *super-Higgs*. On peut le décrire, en procédant par analogie avec la brisure spontanée de la symétrie de jauge dans une théorie invariante sous le groupe $U(1)$. Pour un champ scalaire complexe z, la densité lagrangienne est

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu z)^\dagger (D^\mu z) - V(z^\dagger, z), \tag{5.1}$$

avec $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ et $D_\mu z = \partial_\mu z - iA_\mu z$. Cette théorie est invariante sous les transformations de jauge

$$z \longrightarrow e^{i\alpha(x)} z, \qquad A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha(x),$$

pour autant que le potentiel soit lui-même invariant. Supposons que $V(z^\dagger, z)$ soit minimum en une valeur constante $\langle z \rangle = v \neq 0$, qui est alors une solution des équations du mouvement, avec $\langle F_{\mu\nu} \rangle = 0$. Par invariance de jauge, les valeurs $e^{i\alpha}\langle z \rangle$ sont des solutions dégénérées quelle que soit la constante α et on peut donc toujours choisir v réel.

L'invariance de jauge est brisée par la valeur moyenne sur le vide v de z. En développant la théorie autour du champ physique $\phi = z - v$, pour lequel $\langle \phi \rangle = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & -\tfrac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + v^2 A_\mu A^\mu - 2v A_\mu \partial^\mu (\mathrm{Im}\,\phi) \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) + 2v A^\mu A_\mu (\mathrm{Re}\,\phi) - V, \end{aligned} \tag{5.2}$$

où V est exprimé en fonction de ϕ. Le champ $\mathrm{Im}\,\phi(x)$ est le boson de Goldstone de la symétrie brisée: on vérifie facilement que le potentiel V ne contient pas de terme quadratique en $\mathrm{Im}\,\phi(x)$. Par contre, (5.2) contient un mélange entre A_μ et $\partial_\mu(\mathrm{Im}\,\phi)$, qui ne sont donc pas indépendants. A ce point, il est utile d'introduire une autre représentation du champ complexe $z(x)$. On peut toujours poser

$$z(x) = e^{i\rho(x)}[\sigma(x) + v],$$

où $\rho(x)$ et $\sigma(x)$ sont deux champs réels de valeurs moyennes sur le vide nulles. La transformation de jauge

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \rho, \qquad\qquad z \longrightarrow z' = e^{-i\rho} z = \sigma + v \tag{5.3}$$

permet d'éliminer $\rho(x)$ et donc d'annuler la partie imaginaire de $\phi(x)$. Dans cette jauge unitaire, la densité lagrangienne (5.2) décrit un champ vectoriel A'_μ de masse $2v^2$ en interaction avec le champ scalaire réel massif σ, qui est le boson de Higgs. Lors du mécanisme de Higgs, le boson de jauge A_μ, de polarisation transverse, absorbe le boson de Goldstone $\mathrm{Im}\,\phi$, de spin zéro.

La brisure spontanée de la symétrie de jauge se manifeste donc par la présence dans la densité lagrangienne développée autour de l'état du vide $\langle z \rangle$ d'un terme de couplage du champ de jauge et du boson de Goldstone, de la forme

$$-2\langle z \rangle A_\mu \partial^\mu (\mathrm{Im}\,\phi).$$

Ce terme permet d'identifier le boson de Goldstone. De même, une brisure spontanée de la supersymétrie locale se manifestera par la présence dans la densité lagrangienne d'un terme couplant le gravitino ψ_μ, qui est le champ de jauge de la supersymétrie, avec un fermion de Goldstone.

Supposons que l'état du vide $\langle z^i \rangle$ de la théorie de supergravité satisfasse les conditions (4.9) et (4.10), laquelle assure l'absence de constante cosmologique. Supposons de plus que

$$\langle e^{\mathcal{G}/2} \mathcal{G}_i \rangle \neq 0 \qquad \text{et/ou} \qquad \langle \mathcal{G}_i (T^a z)^i \rangle \neq 0, \tag{5.4}$$

pour certaines valeurs des indices i et a. A ce stade, le gravitino est un champ de jauge qui possède deux composantes indépendantes. D'après (4.11), la densité lagrangienne contient les contributions quadratiques en ψ_μ suivantes:

$$-\frac{1}{4}ie^{-1}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\nu\partial_\rho\psi_\sigma + m_{3/2}\overline{\psi}_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu - \left\{\overline{\psi}_{R\mu}\gamma^\mu\psi_R^G + \text{h.c.}\right\}, \tag{5.5}$$

avec

$$m_{3/2} = \langle e^{\mathcal{G}/2}\rangle, \tag{5.6}$$

et

$$\psi^G = \langle e^{\mathcal{G}/2}\mathcal{G}_i\rangle\,\psi^i - \frac{1}{2}\langle\mathcal{G}_j(T^a z)^j\rangle\,\lambda^a. \tag{5.7}$$

L'existence d'un terme mélangeant ψ_μ et $\gamma_\mu\psi^G$ indique que la supersymétrie est brisée et que ψ^G est le *fermion de Goldstone*, l'analogue du boson de Goldstone de la symétrie de jauge. On peut d'ailleurs vérifier que la densité lagrangienne ne contient pas de terme de masse de ψ^G: ceci requiert l'ensemble des termes fermioniques qui n'ont pas été reproduits ici. Par une redéfinition du gravitino, qui est un choix de jauge de la supersymétrie locale analogue à (5.3), on peut absorber le fermion de Goldstone ψ^G. La théorie qui en résulte décrit un gravitino de spin 3/2 massif ψ'_μ, de masse $m_{3/2}$. Deux des quatre composantes du spin 3/2 proviennent du fermion de Goldstone ψ^G, absorbé dans ψ'_μ. Le mécanisme du super-Higgs génère donc une masse du gravitino et, en général, des contributions qui détruisent l'égalité des masses à l'intérieur de chaque supermultiplet. On montre en général la règle de somme suivante [18]:

$$\begin{aligned}\text{Supertrace}\,\mathcal{M}^2 &= \sum_{\text{spin } J=0}^{3/2}(-1)^{2J}(2J+1)m_J^2 \\ &= 2(N-1)m_{3/2}^2 - 2\langle R^i_j F_i F^j\rangle\end{aligned}$$

en supposant $\langle\mathcal{G}_i(T^a z)^i\rangle = 0$, ce qui est en général le cas. Dans cette expression, m_J est la masse de chaque état de spin J, la somme parcourt tous les champs, N est le nombre de multiplets chiraux présents dans le modèle. Le dernier terme dépend du choix de la fonction $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned}R^i_j &= \frac{\partial^2}{\partial z^j\partial z_i^\dagger}[\log\det(\mathcal{G}^k_l)] \qquad \text{(courbure de Ricci)}, \\ F_i &= e^{\mathcal{G}/2}(\mathcal{G}^{-1})^j_i\mathcal{G}_j.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Sans brisure de supersymétrie, $m_{3/2} = \langle F_i\rangle = 0$ et la supertrace s'annule. Cette règle de somme indique qu'il est en général possible d'obtenir qu'en moyenne les bosons soient plus lourds que les fermions, une situation qui est indispensable à la construction d'un modèle réaliste: les limites expérimentales sur les masses des partenaires scalaires des quarks et des leptons semblent l'exiger.

Les expressions précédentes ont été écrites dans les unités $\kappa = \sqrt{8\pi}M_P^{-1} = 1$. En rétablissant des unités naturelles, il vient

$$m_{3/2} = \frac{M_P}{\sqrt{8\pi}}\langle e^{\mathcal{G}/2}\rangle.$$

Il est donc possible, en choisissant astucieusement $\mathcal{G}$, d'obtenir $m_{3/2} \ll M_P$, voire $m_{3/2} \sim M_Z$, ce qui assimilerait directement l'échelle de brisure de la supersymétrie avec l'échelle des interactions électrofaibles. Cette dernière relation ne s'avère cependant pas indispensable pour obtenir un modèle satisfaisant.

5.1 Limite de basse énergie: brisure "soft"

La théorie de supergravité possède une échelle d'énergie fondamentale, la masse de Planck $M_P \sim 10^{19}$ GeV, qui détermine la constante de couplage gravitationnelle. En couplant la supergravité à la matière, l'apparition d'un potentiel scalaire permet en général de produire d'autres échelles par l'intermédiaire de valeurs moyennes dans le vide $\langle z^i \rangle \neq 0$. Si de plus ces valeurs moyennes brisent la supersymétrie sans introduire de constante cosmologique, le gravitino acquiert une masse $m_{3/2}$ par le mécanisme du super-Higgs. Le cas intéressant pour la construction de modèles unifiés des interactions fondamentales est celui où la supersymétrie est brisée dans un domaine d'énergie faible face à M_P:

$$m_{3/2} \ll M_P.$$

Dans ce domaine d'énergie, il est légitime de développer la théorie en puissances de $1/M_P$, les termes d'ordres élevés donnant des contributions négligeables aux processus physiques dont l'énergie caractéristique E est faible face à M_P. La limite de basse énergie consiste à prendre

$$M_P \longrightarrow \infty, \qquad m_{3/2} \text{ fixé}, \tag{5.9}$$

dans la théorie de supergravité. Dans cette limite, la gravitation est découplée des autres interactions (le terme d'Einstein disparaît). La théorie de champs qui en découle, qui correspond au terme d'ordre $(1/M_P)^0$, a été construite en général [19, 20, 9]. Elle ne contient que des termes d'interactions renormalisables. De plus, elle possède une supersymétrie globale brisée par des termes qui sont tous contrôlés par $m_{3/2}$ et qui s'annulent évidemment lorsque $m_{3/2} \longrightarrow 0$, qui restaure la supersymétrie. La densité lagrangienne de la théorie effective, obtenue dans la limite (5.9), est de la forme

$$\mathcal{L}_{eff.} = \mathcal{L}_{susy} + \mathcal{L}_{soft},$$

où $\mathcal{L}_{susy}$ est supersymétrique [c'est à dire de la forme (3.47)] et $\mathcal{L}_{soft}$ contient les termes de brisure qui dépendent de $m_{3/2}$.

La densité lagrangienne $\mathcal{L}_{eff.}$ possède des propriétés quantiques remarquables. Elle est renormalisable, même si elle n'a de sens physique que pour les énergies faibles face à M_P. Le calcul des corrections quantiques utilise donc les techniques perturbatives habituelles de la théorie quantique des champs. Le point essentiel est que la théorie effective est libre de toute *divergence quadratique*. Ceci implique que tous les paramètres et échelles d'énergies (y compris les masses des champs scalaires) ne reçoivent que des corrections logarithmiques, du type

$$P(E) = C \log\left(\frac{E}{E_0}\right) P(E_0), \tag{5.10}$$

où $P(E)$ est n'importe quel paramètre physique évalué à l'énergie E et C est un coefficient dépendant des constantes de couplage présentes dans la théorie. L'absence de divergences quadratiques est automatique dans une théorie supersymétrique renormalisable (c'est l'un des "théorèmes de non-renormalisation" de la supersymétrie [4–6]). Elle implique cependant des conditions sur les termes de brisure $\mathcal{L}_{soft}$, qui sont ici remplies. On dira que $\mathcal{L}_{soft}$ ne contient que des termes de brisure *soft* de la supersymétrie.

Physiquement, l'absence de divergence quadratique assure la stabilité quantique des échelles d'énergie. Supposons qu'au niveau classique, on a obtenu une échelle induite par une valeur moyenne sur le vide $M_{ind.}$ qui soit proche de l'échelle électrofaible: $M_{ind.} \sim M_Z \ll M_P$. En général, on s'attend à ce que $M_{ind.}$ reçoive des corrections perturbatives de la théorie de champs proportionnelles à M_P, la constante de proportionnalité C étant d'ordre 10^{-2}. C'est le cas si l'échelle $M_{ind.}$ se rapporte à la masse où à la valeur moyenne sur le vide d'un champ scalaire. Le rapport $M_{ind.}/M_P$ qui est petit à l'ordre classique sera donc d'ordre C au niveau quantique: la théorie de champs lutte contre les hiérarchies d'énergies en déstabilisant les petites échelles. Dans le modèle standard, ce problème de stabilité s'applique directement à la masse du Higgs m_H, qui ne peut être très différente de $M_Z \ll M_P$. Par contre, si la théorie est libre de divergence quadratique, les corrections quantiques à $M_{ind.}$ seront au plus d'ordre $CM_{ind.} \log(M_{ind.}/M_P)$, qui n'excède pas $M_{ind.}$ lui-même: l'absence de divergence quadratique permet d'obtenir des hiérarchies d'énergies. En particulier, ce mécanisme permet de justifier techniquement la petitesse de M_Z par rapport à M_P dans le modèle standard supersymétrique ou couplé à la supergravité, bien qu'il n'apporte pas de compréhension du rapport M_Z/M_P.

Dans le cas de l'extension supersymétrique minimale du modèle standard couplée à la supergravité, les termes de brisure "soft" s'écrivent, en général [19, 9, 10]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{soft} &= \tfrac{1}{2}\sum_a M\overline{\lambda}^a\lambda^a + \sum_i m_{3/2}^2\, z_i^\dagger z^i \\
&\quad + A m_{3/2}[\lambda_u \overline{H} Q U^c + \lambda_d H Q D^c + \lambda_e H L E^c] + \text{h.c.} \\
&\quad + B m_{3/2}\mu H\overline{H} + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Les gauginos λ^a (gluinos, photinos, winos, zino) reçoivent une masse universelle M qui est de l'ordre de $m_{3/2}$: $M \sim m_{3/2}$. De même, tous les scalaires z^i (quarks et leptons scalaires, doublets de Higgs H et $\overline{H}$) reçoivent une masse égale à $m_{3/2}$. La deuxième ligne contient des interactions scalaires trilinéaires. Les quantités $H, \overline{H}, Q, U^c, D^c, L, E^c$ sont les champs scalaires des deux doublets de Higgs, et des partenaires supersymétriques (squarks et sleptons) des doublets de quarks, antiquarks de charge $-2/3$, antiquarks de charge $+1/3$, doublets de leptons, antileptons de charge 1, respectivement. Une somme sur les trois générations de quarks et leptons est sous-entendue. Ces interactions sont contrôlées par les couplages de Yukawa $\lambda_u, \lambda_d, \lambda_e$ du modèle standard, et par le nombre A. Finalement, la dernière ligne de (5.11) contient un terme de masse pour les doublets de Higgs, contrôlé par le nombre B. Comme $\lambda_u, \lambda_d, \lambda_e, \mu$ sont des paramètres de $\mathcal{L}_{susy}$, la brisure de supersymétrie introduit en général quatre nouvelles quantités,

$$m_{3/2}, M, A, B,$$

dont les valeurs dépendent du modèle de supergravité, c'est à dire du choix des fonctions $\mathcal{G}$ et f_{ab}. Toutes les grandeurs physiques (masses, interactions) dépendront de ces quantités ainsi que des paramètres usuels du modèle standard. L'expression (5.11) n'est en fait pas la plus générale qui soit compatible avec la limite de basse énergie d'une supergravité couplée au modèle standard supersymétrique. Elle s'applique cependant aux modèles étudiés généralement, tels que ceux obtenus en supposant que la théorie quantique sous-jacente, au-delà de la masse de Planck est une supercorde.

C'est l'apparition dans $\mathcal{L}_{soft}$ de quatre paramètres seulement qui fait la force et l'intérêt de l'hypothèse de la supergravité. L'absence de divergence quadratique, par exemple, est une condition beaucoup plus faible qui laisse en particulier une complète liberté pour les masses des gauginos, des squarks et des sleptons. Supposer que la brisure de la supersymétrie, qui est indispensable dans un modèle réaliste, trouve son origine dans le mécanisme du super-Higgs de la supergravité réduit fortement le nombre de paramètres à basse énergie et renforce donc la prédictivité du modèle. Cette hypothèse est très généralement sous-entendue dans les analyses phénoménologiques du modèle standard supersymétrique.

Finalement, il faut noter que l'expression (5.11) et les relations entre paramètres qui en découlent sont valables pour des énergies proches de M_P. Elles subissent une renormalisation logarithmique de la forme (5.10) lorsqu'il s'agit d'évaluer des grandeurs physiques à basse énergie. Cette renormalisation sera quantitativement différente selon les grandeurs envisagées. Les masses des partenaires supersymétriques des particules du modèle standard seront en grande partie déterminées par ces corrections logarithmiques. Elles dépendront de manière complexe de l'ensemble des paramètres du modèle (de la masse du quark t en particulier).

Références

1. N. Deruelle, actes de cette école;
   S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, New York, 1972)

2. Y. A. Gol'fand et E. P. Likhtman, JETP lett. 13 (1971) 323;
   D. V. Volkov et V. P. Akulov, JETP Lett. 16 (1972) 438;
   J. Wess et B. Zumino, Nucl. Phys. B70 (1974) 39

3. S. L. Glashow, Nucl. Phys. 22 (1961) 579;
   S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19 (1967) 1264;
   A. Salam, dans "Elementary Particle Theory", éd. par N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968)

4. J. Wess et J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity, 2nd edition* (Princeton University Press, Princeton, 1992)

5. S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Roček et W. Siegel, *Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry*, (Benjamin/Cummings Publ. Co., Reading, 1983)

6. P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity, 2nd edition* (World Scientific Publ. Co., Singapore, 1990)

7. P. G. O. Freund, *Introduction to Supersymmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1986)

8. R. N. Mohapatra, *Unification and Supersymmetry* (Springer-Verlag, New York, 1986)

9. H. P. Nilles, *Supersymmetry, Supergravity and Particle Physics*, Physics Reports 110 (1984) 1

10. H. E. Haber et G. L. Kane, *The Search for Supersymmetry: Probing Physics Beyond the Standard Model*, Physics Reports 117 (1985) 75

11. R. Barbieri, Riv. N. Cimento 11 (1988) 1

12. A. B. Lahanas et D. V. Nanopoulos, *The Road to No-Scale Supergravity*, Physics Reports 145 (1987) 1

13. Pour un exposé plus complet, voir par exemple: J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1976); K. Huang, *Quarks, Leptons & Gauge Fields* 2nd edition (World Scientific, Singapore, 1992); P. Renton, *Electroweak Interactions* (Cambridge University Press, Cambridge 1990)

14. Voir par exemple: P. Ramond, *Field Theory: a Modern Primer, Second Edition* (Addison-Wesley, Reading, 1990): sect. 6.4. ou P. G. O. Freund, ibid.: chap. 21.

15. D. Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen et S. Ferrara, Phys. Rev. D13 (1976) 3214;
    S. Deser et B. Zumino, Phys. Lett. B62 (1976) 335

16. E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello et A. Van Proeyen, Phys. Lett. B116 (1982) 231; Nucl. Phys. B212 (1983) 413

17. T. Kugo et S. Uehara, Nucl. Phys. B222 (1983) 125

18. M. T. Grisaru, M. Roček and A. Karlhede, Phys. Lett. B120 (1983) 110; pour le cas minimal, $\mathcal{G}^i_j = \delta^i_j$ voir E. Cremmer et al. op. cit.

19. R. Barbieri, S. Ferrara et C. A. Savoy, Phys. Lett. B119 (1982) 343;
A. H. Chamseddine, R. Arnowitt et P. Nath, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 970

20. S. K. Soni et H. A. Weldon, Phys. Lett. B126 (1983) 215